

om-zapiski

vprašanja

- ☐ Šibki izrek o dualnosti (ŠID) - dokaz & alternativni dokaz
- ☐ Posledica 1
- ☐ Posledica 2
- ☐ KID in posledice
- ☐ DD, za kaj se uporablja ★
- ☐ matrične igre na splošno
- ☐ kako deluje sx, enako za dvofazno sx(oboje pokazat na primeru)
- ☐ Definicija LP, Standardna oblika LP, Dual LP
- ☐ kakšna sta lahko problem in dual (dopustnost, omejenost, optimalnost - tabela)
- ☐ pr sx na omrežjih in izrek o celostevilskih resitvah in pole dokazat tisto s stohastično in permutacijsko matriko tega ne znam ★
- ☐ PR pa izpeljava sx metode na omrežjih iz izreka o dualnem dopolnjevanju ★
- ☐ Problem pretoka, v LP, povečuje poti, Kirchoffovi pogoji ★
- ☐ Madžarska Metoda z Utežmi: kater problem rešuje, postopek reševanja in zakaj deluje (ničelni graf)
- ☐ farkaševa lema
- ☐ kriterij za prvi odvod (izberi si eno smer ekvivalence in dokazi), kriterij za drugi odvod, dokaz za konveksna ima lokalni min => globalni min
- ☐ dokaz lokalni min => globalni za konveksne funkcije
- ☐ konveksne in afine množice, konv. stožec, konv. funkcije
- ☐ skoraj vse ostale izreke iz konveksne optimizacije brez dokaza
- ☐ Celostevilsko programiranje (nahrbtnik primer kako se resuje)

🔍 Stvari, ki jih ne razumem

1. Kaj je bazna dopustna rešitev (vse spremenljivke, razen baznih, nastavimo na 0) - kaj to pomeni v praksi
2. enega prehoda pri dokazu da je vsaka simetrična igra poštena - gl. zapiske

⚠ Zame težki dokazi

7. predavanje - pretoki in prerezi - natanko 2 možnosti, neskončen ali pa enak pretok=prereu vbistvu cel PR

zapiski

🔗 Definicija

$(\Omega, f, \max / \min)$ je **linearen program** (LP), če je Ω podana z linearnimi enakostmi in neenakostmi in je f linearna.

🔗 Standarden linearen program

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\ \text{p.p.} \quad & a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \leq b_m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

✍ Trditev

Vsak LP lahko zapišemo na ekvivalenten način v standardni obliki.

Dokaz: $\min f(x) \rightarrow \max(-f(x))$, neenakosti obrneš, enakosti razdeliš na 2 dela, $x_i \leq 0 \rightarrow x'_i = -x_i$,
 $x_i < 0 \rightarrow x_i = x'_i - x''_i, x'_i, x''_i \geq 0$

🔗 Dualni problem

$$\begin{array}{ll} P : & \max c^T x \\ & \text{p.p. } Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} P' : & \min b^T y \\ & \text{p.p. } A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

✍ Trditev

Dual od duala je prvotni problem.

$$P'' = P$$

Dokaz: samo daš dvakrat minus, $\max \rightarrow \min$

📖 Šibki izrek o dualnosti (ŠID)

Predpostavki: x dopustna rešitev za P , y dopustna rešitev za P' . Potem je

$$c^T x \leq b^T y$$

torej vsaka dopustna rešitev dualnega problema je zgornja meja za prvotni problem.

Dokaz: Zapišeš P in P' v matrični obliki, $c^T x \leq (A^T y)^T x = y^T (Ax) \leq y^T b = b^T y$
 Alternativni dokaz: podobno, Σ , malo zamenjaš vrstni red po čem najprej sešteješ

Posledica 1

Naj bo x dopusten za P in y dopusten za P' ter $c^T x = b^T y$.

Potem je x optimalna rešitev za P in y optimalna rešitev za P' .

Dokaz: Naj bo x' dopustna rešitev za P , potem $c^T x' \leq b^T y = c^T x$

Posledica 2

$$P \text{ neomejen} \implies P' \text{ nedopusten}$$

Dokaz: Dopustna rešitev P' daje zgornjo mejo za P . Če je P neomejen $\Rightarrow$ ni dopustne rešitve $P \Rightarrow$ ni zg. meje.

Koeficienti dopolnilnih spremenljivk kriterijske funkcije v zadnjem slovarju nam dajo optimalno rešitev za dualni problem. To velja tako pri prvotnem, kot pri dualnem problemu.

Krepki izrek o dualnosti (KID) ★

P optimalen problem, potem je tudi P' optimalen, optimalni vrednosti sta enaki.

Ekvivalentno:

$$\exists x^* \text{ opt. rešitev } P \implies \exists y^* \text{ opt. rešitev za } P', \quad c^T x^* = b^T y^*$$

Dokaz: Zadnji slovar pri problemu duala - vidimo, da nam koeficienti pri dualnih spremenljivkah dajo rešitev dualnega problema. Najprej naredim simplekstno metodo na problemu P , na koncu si ogledam zadnji slovar. Tu imam neko konstanto v^* , ki je opt vrednost in še lin. kombinacijo vseh spremenljivk, prvotnih in dopolnilnih, koeficienti so vsi nenegativni. Razbijemo vsoto na prvotne in dopolnilne spremenljivke, namesto dopolnilnih napišemo kaj dejansko izražajo, namesto koeficientov c_{i+n}^* smo pisali $-y_i^*$. V resnici smo uganili opt. rešitev dualnega problema, potem smo samo še preverili da je dopustna, in da sta vrednosti krit funkcij enaki. To smo dokazali tako, da so očitno y_i^* nenegativni, vse smo izrazili preko prvotnih spremenljivk, malo premečemo vsote in napišemo na drugi strani definicijo krit funkcije. Iz tega da sta krit funkciji enaki, sklepamo, da imata isto konstanto (0) in iste koeficiente. Iz tega dobim, da je vsota $\geq c_j$ kar nam da dopustnost y^* iz prvega pa velja, da sta krit funkciji enaki. Iz posledic ŠID res velja, da je y^* opt rešitev za P' .

Posledica

$P \setminus P'$	nedopusten	neomejen	optimalen
nedopusten	✓	✓ (primer)	✗ (KID)
neomejen	✓ (primer)	✗ (ŠID)	✗ (ŠID)

$P \setminus P'$	nedopusten	neomejen	optimalen
optimalen	✗ (KID)	✗ (ŠID)	✓ (npr. primer kmetije)

Posledica: Za P, P' velja natanko ena izmed možnosti:

- oba sta optimalna
- oba sta nedopustna
- en je neomejen, drugi pa nedopusten

📖 Izrek o dualnem dopolnjevanju (DD)

Naj bo x dopusten za P , y dopusten za P' .

$$x \text{ in } y \text{ sta optimalna} \iff \begin{array}{ll} x_j = 0 & \text{ali} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j \text{ za } \forall j = 1, \dots, n \\ y_i = 0 & \text{ali} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \text{ za } \forall i = 1, \dots, m \end{array}$$

Dokaz: podobno kot ŠID, x, y opt. $\iff L = D \iff \dots$ namesto $\leq$ moraš dokazati enakost - rečeš da je enako po členih, obrneš enačbo, dobiš ravno DD.

○ Opomba - zapis z implikacijo

x, y dopustna. Potem sta optimalna $\iff$

$$\text{Če je } x_j > 0 \implies \sum_{i=1}^n a_{ij}y_i = c_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}y_i < b_j \implies y_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

○ Opomba - S tem lahko zlahka preverimo, če je neka rešitev optimalna

1. korak - preverimo dopustnost
2. korak - vsak pozitiven x_j nam da enakost za dualne spremenljivke.
3. korak - vsaka neenakost iz (1) izpolnjena s $<$ nam da $y_i^* = 0$.
4. korak - rešimo sistem iz (2) in (3). Če **ne** obstaja rešitev, potem tisto ni bila opt rešitev.

opomba: to ne deluje vedno - morda imamo premalo enačb(???)

📖 Izrek - ekonomski pomen dualnih spremenljivk (brez dokaza)

Koeficienti pri rešitvi dualnega problema nam povejo, za koliko se bo spremenila optimalna vrednost, če se bo desna stran spremenila za neko majhno količino.

P je nek linearni program, ki ima *neizrojeno bazno optimalno rešitev*, za katero velja, da so vse konstante v zadnjem slovarju strogo pozitivne (ni nobene ničle).

Potem $\exists \varepsilon > 0 \ni$:

$$\Delta z^* = \sum y_i^* \Delta b_i \quad \text{za} \quad |\Delta b_i| \leq \varepsilon$$

kjer je Δz^* sprememba opt vrednosti krit funkcije z .

Izrek - dual splošnega lin problema

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{p.p.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m' \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = m + 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n' \end{aligned}$$

Torej splošnost pride iz tega, da pustimo enakosti in da so nekatere spremenljivke nenegativne - ampak ne *nujno* vse.

Izrek nam pove, da dual lahko napišemo kot:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^n b_i y_i \\ \text{p.p.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1, \dots, n' \\ & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad j = n' + 1, \dots, n \\ & y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m' \end{aligned}$$

Razlaga: (1) desne strani so koeficienti krit funkcije

(2) pri pogojih - kot običajno, le da tukaj to ni res za vse j , ampak samo za tiste, ki so bili prej nenegativni.

(3) za ostale j imam celo enakosti.

(4) spremenljivke bodo nenegativne le za $i = 1, \dots, m'$

Vemo že, da vsaki neenakosti problema P pripada ena *neneg* dualna spremenljivka y_i v P'

Velja tudi obratno: za vsako *neneg* spremenljivko v P dobim eno neenakost v P' .

Izrek nam pove, da če imam neenakost, dobim nenegativno spremenljivko, če pa imam enakost, pripadajoča spremenljivka ni nujno *nenegativna*.

In obratno - nenegativne spremenljivke v običajnem problemu mi res dajo neenakost. Tiste, ki pa so poljubne, nam dajo celo enakost.

neenakost $\iff$ neg. spremenljivka

enakost $\iff$ poljubna spremenljivka

Dokaz - vbistvu defiicija, razpisana na dolgo s trikom $(y' - y'')$

Izrek - DD za splošni problem

Predpostavka: x, y dopustni za P, P' .

$$x, y \text{ opt. za } P, P' \iff \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i & \text{ali } y_i = 0 \quad i = 1, \dots, m' \\ x_j = 0 & \text{ali } \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j \quad j = 1, \dots, n' \end{array}$$

Spomnimo: pri navadnem DD je bila bodisi $\leq$ enakost bodisi dualna spremenljivka $y_i = 0$.

Zdaj to ne velja za vse i , ampak samo za tiste, kjer imamo zares neenakosti. To je smiselno, ker imamo pri ostalih že itak enakosti. Podobno za 2. trditev

4. predavanje - matrične igre

opomba - minimum je vedno po vrsticah

$A = [a_{ij}]$... 1. igravec plača a_{ij} denarja

Trditev - strategije

$$M_1 = \max_i (\min_j a_{ij}) \quad M_2 = \min_j (\max_i a_{ij})$$

$$M_1 \leq M_2$$

Dokaz: Naj bo M_1 dosežen v (i_1, j_1) in M_2 dosežen v (i_2, j_2) .

Potem velja: $a_{i_1 j_1} = M_1 \leq a_{i_1 j_2} \leq M_2 = a_{i_2 j_2}$

Pri dokazovanju bodi pozorna na notacijo - ne moreš primerjati (i_1, j_1) ampak lahko le $a_{i_1 j_1}$

Definicija

(i_0, j_0) je sedlo matrike A , če je $a_{i_0 j_0}$ **najmanjši** v svoji vrstici in **največji** v svojem stolpcu.

Trditev

A ima sedlo $\iff M_1 = M_2$

Dokaz: ($\Rightarrow$) - rečeš da je sedlo min v vrstici, kar pa je gotovo manjše od $\max(\min \text{ v vrstici})$ kar je definicija M_1 . Dobiš $M_1 \geq M_2$, obratno že itak velja, torej je enakost.

($\Leftarrow$) - podobno kot zg. trditev, ker pa je na levi nekaj kar je min v svoji vrstici, je tudi sedlo min v vrstici (saj so zaradi $M_1 = M_2$ neenakosti pravzaprav enakosti)

Definicija

Kakšna je verjetnost, da 1. izbere i , drugi pa j : $x_i \cdot y_j$ - neodvisna dogodka

Matematično upanje ali pričakovana vrednost

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_i y_j = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) = x^T A y$$

kjer je a_{ij} vrednost funkcije

1. igralec: $\max_x \min_y x^T A y$

2. igralec: $\min_y \max_x x^T A y$

ideja: pri 2. igralcu zmanjšamo najslabši izid.

Trditev

$$\max_x \min_y x^T A y \leq \min_y \max_x x^T A y$$

Dokaz: Določiš "koordinate" L in D (x, y), vmesni člen med $L \leq \leq D$ ima pol-pol koordinate

Trditev

$x \in \mathbb{R}^n$ fiksen

$$\min_y x^T A y = \min_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$$

Dokaz: ($\leq$) očitno - L je manjše kot $\min x^T A y$ po y oblike $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ (saj je to podmnožica) kar je natanko D

($\geq$) Definiramo $s = \min_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$, zapišemo mat. upanje z vsotami, notri najdemo nekaj oblike s , rečemo da je s manjši, saj je min takih stvari, y_j ki je zraven pa se itak sešteje v 1. Dobimo $x^T A y = s = D$.

Opomba

Za izbrano strategijo 1. igralca se 2. igralec optimalno brani s čisto strategijo

Pretvorba v LP

Optimalna strategija za 1. igralca:

$$\begin{array}{ll} \max_x & \min_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \\ \text{p.p} & x_1 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

To ni LP, ker kriterijska funkcija ni linearna - "Definiramo" $s = \min_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i$ kot prej - to storimo tako, da maksimiziramo s , definicijo " s " pa premaknemo v pogoje - da je to minimum povemo tako, da rečemo, da je s manjši pod vsakega posebej

$$\begin{aligned} \max_x \quad & s \\ \text{p.p} \quad & s \leq \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \quad j = 1, \dots, m \\ & x_1 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Podobno storimo za 2. igralca, le da tam minimiziramo t

Oba problema sta dopustna, torej sta oba optimalna & opt. vrednosti sta enaki.

Izrek o minmaxu

Za poljubno matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ velja:

$$v = \max_x \min_y x^T A y = \min_y \max_x x^T A y$$

Ta vrednost je *vrednost igre*

Definicija

Igra je *poštena*, če ima vrednost 0.

Igra je *simetrična*, če je $A^T = -A$.

Trditev

Vsaka simetrična igra je poštena.

Dokaz: uporabiš izrek o minmaxu. $v = \dots = -v \implies v = 0$ in obračaš, uporabiš identiteto za simetričnost & preimenuješ spremenljivke.

Definicija

Pravimo, da x dominira x' , če $x \geq x'$ (kjer $x, x' \in \mathbb{R}^n$)

Če v A i -ta vrstica dominira j -to, lahko j -to izbrišemo (izbrišemo manjšo)

Če i -ti stolpec dominira j -tega, lahko i -tega izbrišemo (izbrišemo večjega)

$\implies$ s tem lahko zmanjšamo matriko

5. predavanje - problem razvoza

Kirchhoffov zakon

$$(x_e)_{e \in E}, \quad x_e \geq 0 \quad \forall v \in V : \quad \sum_{\text{konec}(e)=v} x_e - \sum_{\text{začetek}(e)=v} x_e = b_v$$

minimiziramo: $\sum_{e \in E} c_e \cdot x_e$

☐ Naš linearni program & njegov dual

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{p.p.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{p.p.} & A^T y \leq c \end{array}$$

kjer $b = [b_v]_{v \in V}$ in $c = [c_e]_{e \in E}$

in $A = [a_{ve}]_{v \in V, e \in E}$ incidenčna matrika, kjer $A = \begin{cases} -1 & \text{začetek}(e) = v \\ 1 & \text{konec}(e) = v \\ 0 & v \notin e \end{cases}$

A^T ima v vsaki vrstici natanko eno 1 in -1 zato lahko pogoj zapišemo kot $y_i + c_{ij} \geq y_j \forall ij \in E$.

★ **Izpeljava simpleksne metode na omrežjih:** Spomnimo se DD za splošen LP. Potem lahko za problem razvoja PR rečemo:

Posledica

Naj bo x, y dopustna rešitev za PR, PR'

$$x, y \text{ optimalna} \iff \forall e \in E : \quad x_{ij} = 0 \quad \text{ali} \quad y_i + c_{ij} = y_j$$

($x_{ij} = 0$ pomeni, da nismo ničesar prevozili)

PR lahko rešimo z dvofazno simpleksno metodo. Mi ga bomo rešili s simpleksno metodo na omrežjih.

☐ Opomba

y je dopustna rešitev duala $\iff y + (\varepsilon + \dots + \varepsilon)$ je dopustna rešitev duala

Kriterijska funkcija duala:

$$\sum_{i=1}^n b_i (y_i + \varepsilon) = \sum_{i=1}^n b_i y_i + \varepsilon \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n b_i}_{=0}$$

☐ Opomba

Če je x dopustna za PR

$Ax = b \quad / \cdot \sum$ po stolpcu

$$0 = \sum_{i=1}^n b_i$$

To smo napisali kot predpostavko, vendar je potreben pogoj za dopustnost.

6. predavanje

🔗 Ali lahko rešimo $y_i + c_{ij} = y_j$ za $\forall ij \in E$?

Problem so cikli! (kot neusmerjen graf) - nekako do iste točke prideš po 2 različnih poteh, ki lahko zahtevata različne "pogoje"

🔗 Definicija ★

Naj bo x dopustna rešitev za PR.

x je **drevesna dopustna rešitev** - ddr - če obstaja vpeto drevo T , da je $x_{ij} = 0$ za $\forall ij \notin T$.

✍ Trditev ★

Če obstaja dopustna rešitev za PR, obstaja tudi drevesna dopustna rešitev (ddr).

Dokaz: iščeš izstopne povezave, jih daješ stran.

<> Postopek za reševanje PR:

1. poiščemo ddr

2. rešimo $y_i + c_{ij} = y_j$ za $ij \in T$. Če je $y_i + c_{ij} \geq y_j \quad \forall ij \in E \setminus T$, je x opt. rešitev

3. če $y_i + c_{ij} < y_j$ za kakšen $ij \in E \setminus T$, je ij vstopna povezava

Dodamo ij v T , dobimo cikel.

$$t := \min\{x_e : e \text{ obratna}\} \geq 0$$

Na premih povečamo x za t , na obratnih zmanjšamo x za t .

Povezava, na kateri je min dosežen je izstopna povezava, odstranimo iz $T \cup \{i, j\}$, dobimo novo vpeto drevo. Nadaljujemo.

○ Opomba

★ Če velja $y_i + c_{ij} \geq y_j \quad \forall ij \in E \setminus T$, potem je $(x_e)_e$ optimalna - to že vemo iz DD

Dokaz: ???

○ Opomba

Naj bo x poljubna ddr.

$$(y_i + c_{ij} - y_j)x_{ij} = 0 \quad / \sum_{ij \in E}$$

$$c^T x - b^T y = 0$$

$c^T x = b^T y$ velja za vsako ddr in pripadajoče razvozne cene.

○ Opomba

T vpeto drevo enolično določa ddr. (če obstaja)

Izberemo list in x_e na edini povezavi iz lista je enolično določena. Vzamemo jo ven (list in povezavo) ter nadaljujemo.

○ Opomba

Ciklanju se lahko izognemo s Cunninghamovim pravilom.

- r izbrani koren
- med kandidatki za izstopno povezavo izberemo tisto, ki je prva na poti od r do izstopne povezave.

<> Postopek

Kako poiščemo začetno ddr oz. dokažemo, da je problem nedopusten - uporabimo dvofazno sx metodo na omrežjih.

1. faza - rešimo pomožen problem

- izberemo koren r
- $v \in V \setminus \{r\}$ (vozlišča ostanejo enako utežena kot prej)
- dodamo umetne povezave (cena 1)
 - $b_v \geq 0 \implies$ dodamo rv (če še ne obstaja), $x_{rv} = b_v$
 - $b_v < 0 \implies$ dodamo povezavo vr (če še ne obstaja) $x_{vr} = -b_v$

- prvotne povezave: cena 0

To je DDR za dodatni problem (veljajo Kirchhoffovi zakoni).

$$v \neq r : \quad b_v \geq 0 : \quad b_v - 0 = b_v$$

$$b_v < 0 : \quad 0 - (-b_v) = b_v$$

$$v = r : \quad \sum_{\text{konec}(x)=r} - \sum_{\text{zacetek}(x)=r} = \sum_{v \neq r, b_v < 0} (-b_v) + \sum_{v \neq r, b_v \geq 0} b_v = \sum_{v \neq r} b_v = b_r$$

Cene so nenegativne $\rightarrow$ problem je omejen $\rightarrow$ je opt

- Če je opt. vrednost 0, je prvotni problem dopusten (obstaja rešitev pomožnega problema, ki uporablja samo prvotne povezave). Optimalna rešitev pomožnega problema nam daje ddr prvotnega (odstranimo umetne povezave z razvozom 0)
- če je opt vrednost > 0 , prvotni problem ni dopusten.

○ Opomba

Če ne moremo izbrati izstopne povezave: vse povezave v ciklu so preme, lahko jim dodamo poljubno velik t - problem je neomejen.

V praksi to pomeni - če prepeljemo eno enoto surovine po tem ciklu, "zaslužimo"

Izrek o celoštevilskih rešitvah

Naj bodo $b_v \in \mathbb{Z}$

(1) Če obstaja dopustna rešitev, obstaja tudi celoštevilska dopustna rešitev

(2) Če obstaja optimalna rešitev, obstaja tudi celoštevilska optimalna rešitev

Dokaz:

(1) Rešimo pomožni problem, razvozi so na začetku $\pm b_v, 0$ in ostanejo celoštevilski

(2) Naredimo še 2. fazo, na vsakem koraku ima celoštevilsko ddr.

Definicija

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je dvojno stohastična, če $a_{ij} \geq 0$ tako da

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall i, \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$[a_{ij}]$ si lahko predstavljamo kot verjetnosti

Primer

$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je permutacijska matrika, če je v vsakem stolpcu & vrstici natanko ena 1, ostalo pa so 0.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Permutacijska matrika je dvojno stohastična.

Trditev ★

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dvojno stohastična. Potem obstaja permutacijska matrika P tako da velja:

$$p_{ij} > 0 \implies a_{ij} > 0$$

Dokaz: skonstruiramo omrežje (dvodelen graf, kjer so X stolpci, vrednost -1 in Y vrstice, vrednost 1, povezava je če je v ij -tem mestu matrike element > 0). tak PR je dopusten, obstaja celoštevilska dopustna rešitev, $p_{ij} \in \{0, 1\}$

Posledica - Königov izrek o plesnih parih

$G = X \cup Y$ dvodelni graf, k -regularen, $0 < k \leq n$, $|X| = |Y| = n$

Potem ima G popolno prirejanje.

Dokaz: Naredimo matriko kjer $a_{ij} = \frac{1}{k}$ če $x_i \sim y_j$, sicer 0.

-- problem razvoja z omejitvami -----

7. predavanje - pretoki in prerezi

🔗 Problem pretoka

Naj bo G usmerjen graf, s, t izbrani vozlišči (začetno & končno) $\ni$:

$\text{konec}(e) \neq s \quad \forall e \in E$ in $\text{začetek}(e) \neq t \quad \forall e \in E$

$e \in E : \quad u_e \in [0, \infty)$

Dopusten pretok: $0 \leq x_e \leq u_e \quad \forall e \in E$

$$\sum_{\text{začetek}(e)=v} x_e = \sum_{\text{konec}(e)=v} x_e \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}$$

Iščemo $\max \sum_{\text{začetek}(e)=s} x_e$ vrednost pretoka

...

🔗 Problem prereza

$C \subseteq V$ je prerez, če $s \in C, \quad t \notin C$.

Kapaciteta prereza je $\sum_{i \in C, j \notin C} u_{ij} \in [0, \infty)$

Iščemo minimalni prerez, t.j. prerez z najmanjšo kapaciteto

✍ Trditev ★

$$\text{vrednost pretoka} \leq \text{kapaciteta prereza}$$

Dokaz: seštevaš po povezavah, sešteješ po vseh vozliščih razen s, t , odšteješ skupne povezave

○ Opomba

Za poljuben prerez C velja:

$$\sum_{i \in C, j \notin C} x_{ij} - \sum_{i \notin C, j \in C} x_{ij} = \text{vrednost pretoka}$$

📖 Izrek ★★

Dan je problem max pretoka / min prereza. Velja natanko ena od možnosti:

- (1) Obstajajo pretoki s poljubno velikimi vrednostmi, vsi prerezi imajo kapaciteto ∞
- (2) Obstaja maksimalen pretok, obstaja tudi prerez, katerega kapaciteta je enaka vrednosti maksimalnega pretoka

Dokaz: prevedemo na problem razvoja z omejitvami. Ker je problem dopusten, je bodisi neomejen bodisi optimalen. y_v razvozne cene, $y_t + c_{ts} \geq y_s$, ker povezava ni nasičena in ni v drevesu.

Definiramo nek prerez $v \in V$, $y_v \leq y_s$ in pokažemo, da kapaciteta = vrednost pretoka. Uporabimo definicijo za $i \in C$, $j \notin C$

= ... je v drevesu

$\leq$... je nasičena

$\geq$... je prazna

🔗 Definicija - povečujoča pot ★

Povečujoča pot (za dani pretok) je $v_0 v_1 v_2 \dots v_k$ da velja:

$$v_0 = s \quad v_k = t \quad \forall i = 1, \dots, k :$$

$$v_{i-1}v_i \in E, \quad x_{v_{i-1}v_i} < u_{v_{i-1}v_i} \quad (\text{prema povezava})$$

ali

$$v_{i-1}v_i \in E, \quad x_{v_{i-1}v_i} > 0 \quad (\text{obratna povezava})$$

Če imamo povečujočo pot, lahko povečamo pretok: na premih pretok povečamo za ε , na obratnih pa zmanjšamo za ε , kjer je

$$\varepsilon := \min\{x_e; \quad e \text{ obratna}\} \cup \{u_e - x_e; \quad e \text{ prema}\}, \quad \varepsilon > 0$$

<> kako najdemo povečujočo pot, kako deluje FF algoritem

8. predavanje - prirejanja in pokritja

🔗 Definicija

G graf, $G = (V, E)$.

$M \subseteq E$ je **prirejanje**, če za $e, f \in M$, $e \neq f$ velja $e \cap f = \emptyset$

Z drugimi besedami: nobeno vozlišče v V ni krajišče več povezav iz M .

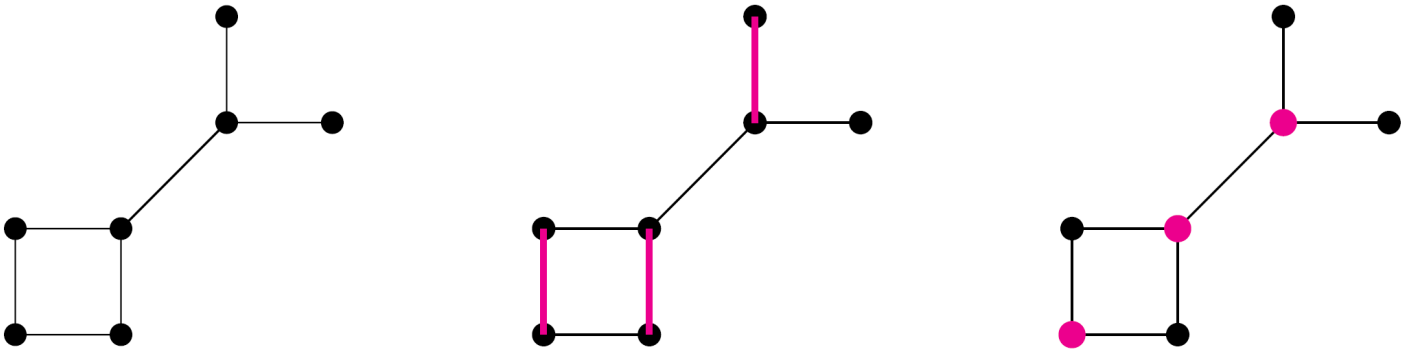
Prirejanje je **popolno**, če za $\forall v \in V \quad \exists e \in M : \quad v \in e$

oz. vsako vozlišče iz V je krajišče natanko ene povezave iz M .

🔗 Definicija

Pokritje je $P \subseteq V$, če za $\forall e \in E$ velja $e \cap P \neq \emptyset$
torej vsaka povezava ima vsaj eno krajišče v P .

$\mu(G) \dots$ velikost največjega prirejanja $\tau(G) \dots$ velikost največjega pokritja



✍ Trditev

- (1) M prirejanje in P pokritje $\implies |M| \leq |P|$
- (2) $\mu(G) \leq \tau(G)$
- (3) Če velja $|M| = |P|$, potem je M največje prirejanje in P najmanjše pokritje.
Velja $\mu(G) = \tau(G) = |M| = |P|$

dokaz 1: $f : M \rightarrow P$, f je injektivna

○ še nekaj pomožnih definicij

Naj bo M prirejanje v grafu G .

- e je **vezana povezava**, če je $e \in M$
- e je **prosta povezava**, če je $e \notin M$
- v je **vezano vozlišče**, če $\exists! e \in M \ni v \in e$
- v je **prosto vozlišče**, če $\nexists e \in M \ni v \in e$

🔗 Definicija

Pot je izmenična oz. **alternirajoča**, če se na njej izmenjujejo proste in vezane povezave.

Pot je **povečujoča**, če je alternirajoča in se začne in konča s prostim vozliščem.

📖 Izrek (Berge)

M je največje prirejanje $\iff$ ne obstaja povečujoča pot

Dokaz: ($\Rightarrow$) očitno

($\Leftarrow$) Denimo, da M ni največje prirejanje, ampak je M' . Podgraf $H = M \oplus M'$.

🔍 zakaj je v ($\Rightarrow$) smer očitno??

ja ce bi obstajala povecujoca pot, je ta povecujoca pot taka, da ma prosto vozlisce iz kerga gre prosta povezava in nakoncu tudi tko ane

kar pomen da ce na tej povecujoci poti zamenjamo proste in vezane povezave, dobimo zihhr za 1 vecje prirejanje

torej tisti M k ga mammo ne more bit najvecji

in pol mas to pac $A \Rightarrow B$ je isto kot $neB \Rightarrow neA$

9. predavanje - madžarska metoda

<> Kako deluje madžarska metoda

G dvodelni graf, $V = X \cup Y$, M prirejanje.

$S = \{\text{prosta vozlišča v } X\}$ $T = \{\}$

Gremo po vseh možnih prostih povezavah navzdol, in po edini možni rdeči navzgor. Če pa ni nobene rdeče povezave (ko sem v vozlišču v Y), to pomeni, da sem prišel do nekega prostega vozlišča - in s tem do povečujoče poti.

Na vsakem koraku:

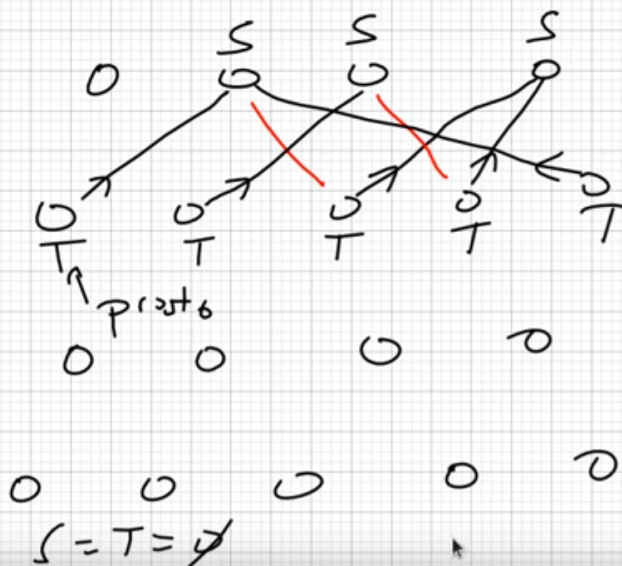
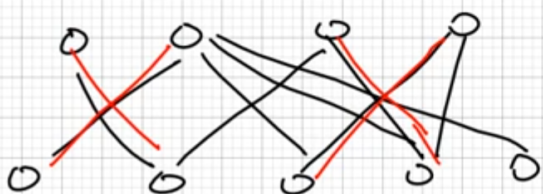
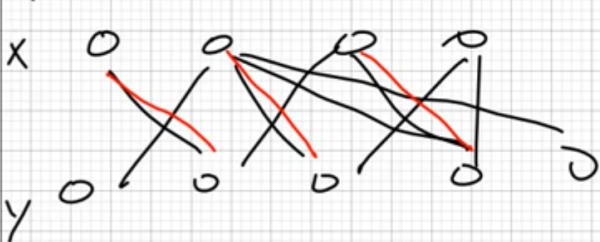
- $S' = S \cup \{\text{vozlišča v } X, \text{ do katerih lahko pridemo po vezanih povezavah iz } T\}$
- $T' = T \cup \{\text{vozlišča v } Y, \text{ do katerih lahko pridemo po prostih povezavah iz } S\}$

Če v nekem trenutku T vsebuje prosto vozlišče, smo našli povečujočo pot. Zamenjamo črne in rdeče povezave na tej poti.

Sicer je v nekem trenutku $S' = S$ in $T' = T$.

Dokazali bomo, da je takrat M največje prirejanje, in našli bomo pokritje P , tako da $|P| = |M|$

Primer:



📖 Izrek

Naj se MM ustavi, $S' = S$, $T' = T$

Potem je $P := (X \setminus S) \cup T$ pokritje, $|P| = |M|$.

Torej je M največje prirejanje, P najmanjše pokritje, $\mu(G) = \tau(G)$

Dokaz: ...

📖 Hallov izrek

G dvodelni graf, $V = X \cup Y$

Obstaja popolno prirejanje iz X v $Y \iff \forall A \subseteq X : |A| \leq N(A)$

madžarska metoda z utežmi

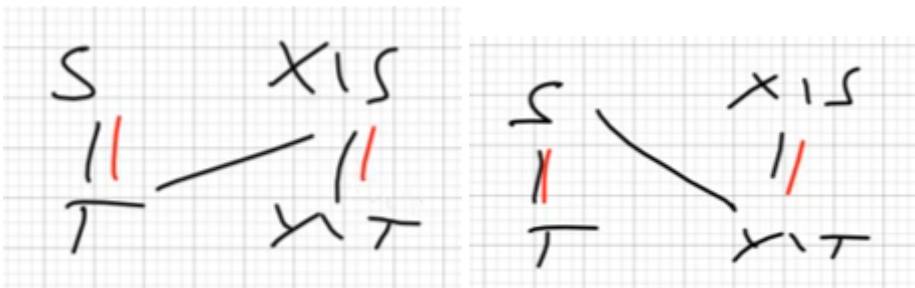
Podana je matrika C , vrne nam minimalno popolno prirejanje

1. korak - od vsake vrstice odštejemo njen minimum
2. korak - od vsakega stolpca dobimo njegov minimum
Dobimo nenegativno matriko, v vsaki vrstici in stolpcu vsaj ena ničla.
3. korak - pokrijemo vse ničle v matriki z $< n$ vrsticami in stolpci.

$$\varepsilon := \text{najmanjše nepokrito polje} > 0$$

Od nepokritih polj *odštejemo* ε ; dvakrat pokritim *prištejemo* ε

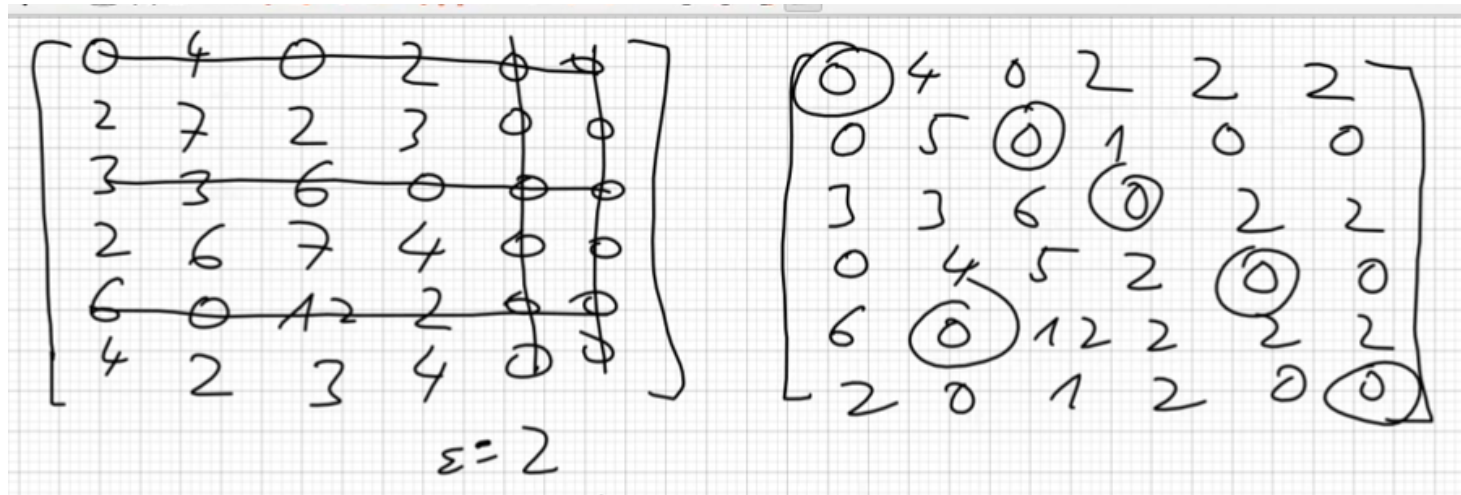
4. korak - sicer lahko najdemo n ničel v različnih vrsticah in stolpcih - kar nam daje **minimalno** popolno prirejanje.
 5. korak - zakaj se ta algoritem ustavi - ko odštevamo, se povezave med $S - T$ in $X \setminus S - X \setminus T$ ne spremenijo.
- Vse povezave med $X \setminus S - T$ bodo izginile (ko prištejem ε iz ničel dobimo sama pozitivna števila)
 - Ko odštejemo ε dobimo med S in $Y \setminus T$ zagotovo novo povezavo xy , daj med nepokritimi dobimo vsaj eno ničlo, ko odštejemo minimum (ε)



Ločimo 2 primera glede na Y :

- Y prosto vozlišče - našli smo povečujočo pot $\implies M$ se poveča (največ n -krat)
- Y vezano vozlišče - eno vozlišče iz $X \setminus S$ gre v S , S se poveča za 1 - glede na to, da imamo n vozlišč, se S lahko poveča največ n -krat zapored.
 $\implies$ MMU se zaključi po največ n^2 korakih $\implies \mathcal{O}(n^4)$

S tem lahko rešimo problem plavalcev.



Ničelni graf - dvodelni graf, kjer $X \dots$ vrstice, $Y \dots$ stolpci, $v_i \sim s_j \iff c_{ij} = 0$

V ničelnem grafu poiščemo največje prirejanje (z madžarsko metodo). dve možnosti:

- največje prirejanje je premajhno: $|M| < n \implies |P| < n$ - izberem lahko manj kot n vozlišč iz grafa G , tako da bo vsaka povezava pokrita bodisi z enim vozliščem zgoraj, bodisi z enim vozliščem spodaj. Torej P določa manj kot n vrstic in stolpcev, ki pokrijejo vse ničle.
- prirejanje velikosti $n - M$ je min popolno prirejanje na našem grafu

Opomba

Najdražje popolno prirejanje: rešimo problem najcenejšega popolnega prirejanja za matriko $-C$.

10. predavanje - konveksna optimizacija

Definicija

$A \subseteq \mathbb{R}$ je konveksna, če:

$$x, y \in A, \quad \lambda \in [0, 1] : \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in A$$

torej $\alpha x + \beta y, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1$ je konveksna kombinacija.

Trditev

Presek konveksnih množic je konveksen.

Dokaz: $A_i, i \in I$ konveksne. $A = \bigcap_{i \in I} A_i, \quad x, y \in A, \lambda \in [0, 1]$. Naredimo konveksno komb x, y in pokažemo da je v A_i torej je tudi v A .

Definicija

$$\mathcal{C}(A) = \bigcap_{K \subseteq \mathbb{R}, K \text{ konv}, A \subseteq K} K \dots \text{konveksna ogrinjača}$$

$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ je **konveksna kombinacija** vektorjev $x_1, \dots, x_k$, če je $\lambda \geq 0$ in $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$

Trditev

$$\mathcal{C}(A) = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k : \begin{array}{l} \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0 \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1, \end{array} \quad x_1, \dots, x_k \in A\}$$

Dokaz: Želimo dokazati $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \in \mathcal{C}(A) \subseteq$ z indukcijo na k , vemo za $k = 2$ ker je to ravno konv. kombinacija, $k - 1 \rightarrow k$ hočemo spraviti v obliko konv. kombinacije 2 elementov,

$(1 - \lambda_k)(\dots) + \lambda_k x_k$. Pokažemo, da je $(\dots) \in A$, ker je konv. komb. $k - 1$ vektorjev.

$\supseteq$ Dokažemo, da ta lin komb vsebuje A (očitno, $1 \cdot x$) in da je konveksna (vzamemo 2 elementa iz te množice in pokažemo da je njuna konveksna kombinacija)

☐ Posledica

Iz tega sledi:

- $A \subseteq \mathcal{C}(A)$
- $\mathcal{C}(A)$ je konveksna (ker je presek konveksnih množic)
- $A \subseteq K^{\text{konv}} \implies \mathcal{C}(A) \subseteq K^{\text{konv}}$
- Če je K konveksna, je konveksna kombinacija vektorjev iz K tudi v K

Definicija

Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ konveksna.

$x \in K$ je **ekstremna točka**, če **ne** $\exists x_1, x_2 \in K, \quad x_1 \neq x_2, \quad \lambda \in (0, 1) :$

$$x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$$

Kdaj **ni** ekstremna točka? Če leži v notranjosti neke daljice s krajišči v K .

Definicija

$$(1 - \lambda)x + \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \dots \quad \text{afina kombinacija } x \text{ in } y$$

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 \quad \dots \quad \text{afina kombinacija vektorjev } x_1, \dots, x_k$$

☐ Opomba

Afine množice v $\mathbb{R}^3$: premice, ravnine, singleton, $\mathbb{R}^3$.

Afinim množicam rečemo tudi afini podprostor.

Trditev

NTSE: za $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$:

(1) A je afina

(2) Vsaka afina kombinacija elementov iz A je v A

(3) $A = a + V = \{a + v; v \in V\}$, kjer V v. pr. $\subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$

Dokaz: (1) $\implies$ (2) dokazujemo z indukcijo po k (isti trik kot prej)

(2) $\implies$ (3) pokazati želimo, da je V v. podpr. Vzamemo elementa $x - a$, $y - a$, $x, y \in A$ in $\lambda(x - a) + \mu(y - a) + a - a = \dots \in V$ (ravno afina komb elementov iz A)

(3) $\implies$ (1)

konveksni stožci in farkaševa lema

🌀 Definicija ★

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ je **konveksni stožec**, če za

$$\forall x, y \in S, \quad \lambda, \mu \geq 0 \quad \text{velja} \quad \lambda x + \mu y \in S$$

○ Opomba - terminologija

$$x, y \in A \quad \lambda x + \mu y \in A$$

- $\forall \lambda, \mu \quad \dots$ lin. podprostor
- $\forall \lambda, \mu \quad \lambda + \mu = 1 \quad \dots$ afin podprostor
- $\forall \lambda, \mu \quad \lambda + \mu = 1, \quad \lambda, \mu \geq 0 \quad \dots$ konveksna množica
- $\forall \lambda, \mu \quad \lambda, \mu \geq 0 \quad \dots$ konveksni stožec

🌀 Definicija

Konveksni stožec, napet na $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$

$$S(a_1, \dots, a_k) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0\} \quad \text{je konveksni stožec}$$

D: $\lambda(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) + \mu(\mu_1 a_1 + \dots + \mu_k a_k) = (\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1)a_1 + \dots$ kjer vsi koef pred $a_i \geq 0 \implies$ torej je res konv. stožec

🌀 Definicija

Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ poljubna. **Dualni stožec** množice A je

$$A^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad a^T x \geq 0 \quad \forall a \in A\}$$

torej vsi taki vektorji, da, če vzamemo poljuben vektor iz A , je kot med njima oster.

Trditev

A^* je konveksni stožec

D: narediš komb x, y in gledaš če $a^T(\lambda x + \mu y) \geq 0$

Trditev

$$A \subseteq A^{**}$$

D: $a \in A, x \in A^* \quad a^T x \geq 0$ po definiciji $\implies a \in A^{**}$

Zakaj ne velja enakost? A^{**} je dualni stožec, ki je vedno konveksni stožec, A pa ni nujno konveksni stožec.

Trditev ★

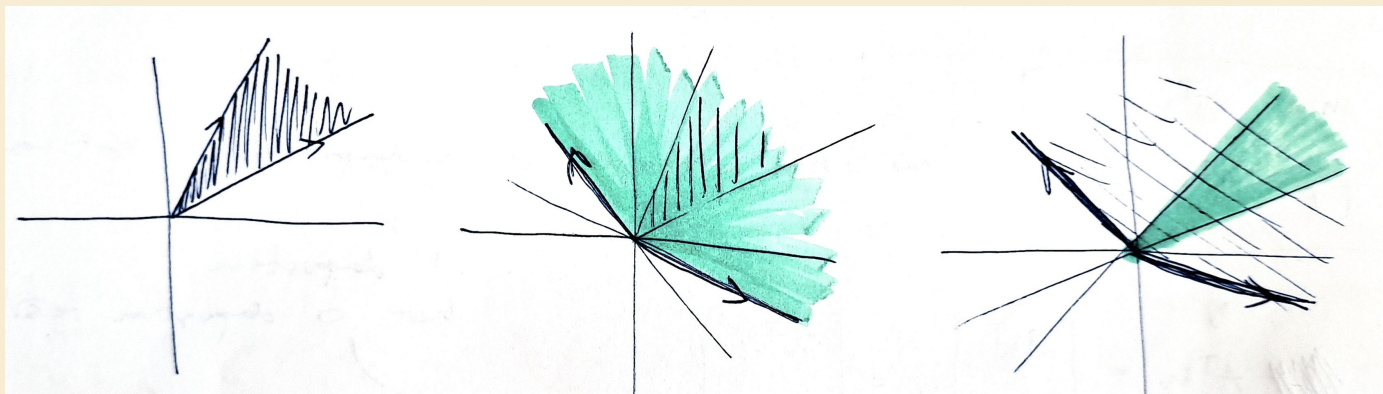
$$S^*(a_1, \dots, a_k) = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \geq 0, \quad i = 1, \dots, k\}$$

D: ($\subseteq$) kot med njima je oster ($a_j^T x \geq 0$),

($\supseteq$) če je kot med vektorjem in obema "mejnima" oster, bo tudi za neneg. kombinacije

Farkaševa lema - geometrijska različica

$$S^{**}(a_1, \dots, a_k) = S(a_1, \dots, a_k)$$



D: $\supseteq$ že vemo po trditvi $A \subseteq A^{**}$

$\subseteq$ Naj bo $b \in S^{**}(a_1, \dots, a_k)$. Radi bi dokazali $b \in S(a_1, \dots, a_k)$ oz.

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0 \ni b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ oz. $A\lambda = b$. To zapišemo kot LP, za krit funkcijo vzamemo najpreprostejšo, 0. Želimo dokazati, da obstaja takšna rešitev, torej da je problem dopusten. Ker je krit funkcija 0, je vsaka dopustna rešitev optimalna. Po KID je P optimalen $\iff P'$ optimalen.

Pozor, tukaj ni $y \geq 0$ ker imaš pri P enakost. P' dopusten, ker je 0 dopustna rešitev. y dopustna rešitev $\iff$ velja pogoj, torej $A^T y \geq 0$ oz. $a_i^T y \geq 0, i = 1, \dots, k \iff y \in S^*(a_1, \dots, a_k)$. Problem je dopusten, torej je neomejen ali optimalen. Pokazati želimo, da ima spodnjo mejo. Za elemente iz S^* vemo: $b^T y \geq 0$ (po prejšnji trditvi in ker $a_i \geq 0$). **Za vsak dopusten y je $b^T y \geq 0 \implies P'$ optimalen problem.**

bold del mi ni čisto jasen

📖 Farkaševa lema - algebraična različica, 1. verzija ★

$A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Potem je

$$\exists x \in \mathbb{R}^k, \quad x \geq 0, \quad Ax = b \iff \forall y \in \mathbb{R}^n : (A^T y \geq 0 \implies b^T y \geq 0)$$

$$\uparrow b \in S(a_1, \dots, a_k)$$

$$\uparrow b \in S^{**}(a_1, \dots, a_k)$$

Farkaševa lema pravi: če rešitve sistema $Ax = b, x \geq 0$ ni, vedno obstaja "certifikat" neobstoja.

Kako to vidimo iz algebraične različice? Negiramo obe strani, in na desni dobimo:

$\dots \iff \exists y : A^T y \geq 0, \quad b^T y \leq 0$ y je točno to, s čimer pomnožimo enačbe. gl. 10. pred, str. 9

Če hočemo komu pokazati, da taki x obstajajo, jih sproduciramo.

Če hočete pokazati, da ne obstajajo, poskušamo dobiti neko nemogočo neenakost. Ohranjati moramo neenakosti v pravo smer, zato množimo z nenegativnimi števili.

📖 Farkaševa lema - algebraična različica, 2. verzija

$A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Potem je

$$\exists x \geq 0 : \quad Ax \leq b \iff \forall y \in \mathbb{R}^n : (A^T y \geq 0, \quad y \geq 0 \implies b^T y \geq 0)$$

Dokaz: Konstruiramo LP, kdaj je ta problem dopusten/opt $\iff$ dualen problem opt.

Od prejšnjega dokaza se razlikuje po tem, da imamo v P' pogoj $y \geq 0$, saj imamo tokrat LP v standardni obliki (z neenakostjo).

○ Opomba

$$b \notin S(a_1, \dots, a_k) \implies b \notin S^{**}(a_1, \dots, a_k)$$

Drugi del pomeni, da $\exists$ nek vektor, tako da je kot **top**.

Če b ni v konveksnem stožcu, napetem na $a_1, \dots, a_k$, potem obstaja hiperravnina, ki separira b in $S(a_1, \dots, a_k)$.

Najdemo normalni vektor hiperravnine, tako da b z njim tvori topi kot.

○ Opomba

Farkaševa lema sloni na KID. Tudi KID lahko dokažemo s pomočjo Farkaševe leme.

11. predavanje - konveksne funkcije, kriterij odvoda

🔗 Definicija

$$K^{\text{konv}} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$f : K \rightarrow \mathbb{R}$ je **konveksna**, če za $\forall x, y \in K \quad \forall \lambda \in [0, 1]$ velja

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

(desni del pomeni, da je ena točka vmes med $f(x)$ in $f(y)$)

Funkcija je **konveksna**, če je graf med dvema točkama pod zveznico.

🔗 Definicija

Funkcija je **konkavna**, če

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad \forall x, y \in K \quad \lambda \in [0, 1]$$

Stroga konkavnost pomeni $>$. Podobno konveksnost.

○ Opomba

$$f \text{ afina} \iff f \text{ konveksna} \quad \& \quad f \text{ konkavna}$$

D:

y

[!trditev] Trditev ★★

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad K \text{ konv}$$

$$A = \{x \in K : f(x) \leq b\}$$

Potem je A konveksna množica.

D: Vzamemo $x, y \in A$ in damo njuno konv komb v funkcijo f , pokažemo, da je to $\leq b$

🔗 Trditev ★★

$$(1) f, g : K^{\text{konv}} \rightarrow \mathbb{R} \text{ konveksna funkcija} \implies f + g \text{ konveksna fun}$$

$$c \geq 0 \implies c \cdot f \text{ konveksna}$$

$$(2) f : g(K) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : K^{\text{konv}} \rightarrow \mathbb{R} \implies g(K) \text{ konveksna} \xrightarrow{f \text{ konveksna}} f \circ g \text{ konveksna}$$

$$(3) f : \mathcal{C}(g(K)) \rightarrow \mathbb{R} \quad g : K^{\text{konv}} \rightarrow \mathbb{R} \text{ konveksna.} \quad \text{Potem je } f \circ g \text{ konveksna.}$$

Dokaz: ...

🔗 Izrek (kriterij 1. odvoda)

$f : K \rightarrow \mathbb{R}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta in konveksna. f odvedljiva (t.j. $\exists$ parcialni odvodi $\frac{\partial f}{\partial x_i} : K \rightarrow \mathbb{R}$)

Potem je f konveksna $\iff f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x))^T(y - x) \quad \forall x, y \in K$

Dokaz: ($\Leftarrow$) $x, y \in K$, $z = (1 - \lambda)x + \lambda y \in K$, vržeš ju v formulo na desni (vsakega posebej), narediš konv komb $f(x)$ in $f(y)$, pokažeš da je $\geq f(z)$
($\Rightarrow$) ojoj

Izrek (kriterij 2. odvoda)

Naj bo $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva.

Potem je f konveksna $\iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

Izrek (kriterij 2. odvoda)

$f : K \rightarrow \mathbb{R}$, K odprta in konveksna, f dvakrat zvezno odvedljiva

Potem je f konveksna $\iff H_f(x) \geq 0 \quad \forall x \in K$

Dokaz: dolg 2 strani

12. predavanje - konveksne funkcije in optimizacija

Definicija

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

f ima v $x \in A$ **globalni maksimum**, če $f(x) \geq f(x') \quad \forall x' \in A$

f ima v $x \in A$ **lokalni maksimum**, če $\exists \varepsilon > 0 : f(x) \geq f(x') \quad \forall x' \in A, |x - x'| < \varepsilon$

Trditev ★

Če je $x^* \in K$ lokalni minimum konveksne funkcije f , potem je x^* tudi globalni minimum.

D: Če x^* ni globalni minimum, $\exists y : f(y) < f(x^*)$. Vzameš funkcijo od konv. komb x^* in y in jo navzgor oceniš najprej s konveksnostjo, nato z zg. neenakostjo, dobiš $f(x^*)$. Potem vzameš definicijo lok. minimuma (kar je x^*) in vzamemo $x = (1 - \lambda)x^* + \lambda y$ in ocenimo navzgor z ε . Obrnemo enačbo, vidimo, da je $\lambda \in \left(0, \frac{\varepsilon}{\|y - x^*\|}\right)$, torej velja sklep pri lok minimumu, kar je protislovje z začetno predpostavko.

Izrek

$f : K \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna, odprta, dvakrat zvezno odvedljiva.

$$H_f(x) > 0 \quad \forall x \in K \implies f \text{ strogo konveksna}$$

brez dokaza

Izrek ★

$f : K^{\text{konv}} \longrightarrow \mathbb{R}$ strogo konveksna funkcija, f ima v x^* globalni maksimum. Potem je x^* ekstremna točka.

Dokaz:

<> VEN ... vezani ekstrem z neenačbami

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, \dots, x_n), \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ & g_1(x) \leq 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Rešujemo lahko z Lagrangevimi multiplikatorji:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

KKT pogoji

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} L &= 0 & i &= 1, \dots, n \\ \lambda_j \cdot g_j(x) &= 0 & j &= 1, \dots, m \\ \lambda_j &\geq 0 & j &= 1, \dots, m \\ g_j(x) &\leq 0 & j &= 1, \dots, m \end{aligned}$$

$\implies$ preveriti moramo 2^m možnosti

Opomba

KKT pogoji niso ne potrebni, ne zadostni za to, da je dana točka minimum (v splošnem).

Izrek

$$f : K^{\text{konv, odp}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$f, g_1, \dots, g_m$ konveksne odvedljive funkcije

Če so v (x^*, λ^*) izpolnjeni KKT pogoji, je x^* glob min

Dokaz:

Izrek

$f : K \rightarrow \mathbb{R}$, K odprta

$D = \{x \in K : g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m\}$

Denimo, da obstaja globalni minimum x^*

Če velja:

- $g_1, \dots, g_m$ afine funkcije ALI
- $f, g_1, \dots, g_m, K$ konveksne, notranjost $D \neq \emptyset$ ALI
- $\{\nabla g_1(x^*), \dots, \nabla g_m(x_m^*)\}$ lin neodvisni

Potem so v (x^*, λ^*) izpolnjeni KKT pogoji.

brez dokaza

13. predavanje - celoštevilsko linearno programiranje

definicija + problem 0/1 nahrbtnika (reševanje s principom razveji in omeji)

danes 18: 00: prirejanja, pokritja, MM + konveksnost

jutri: uporaba farkaševe leme (11), 12, 13, 14. je izi (razveji in omeji na primeru nahrbtnika)